

① In coordinate sferiche V si trasforma in

$$V' = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Ricordando che lo Jacobiano è dato da $J = \rho^2 \sin \varphi$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Massa di } V &= \iiint_V \frac{\ln \rho}{\rho} dV = \iiint_{V'} \frac{\ln \rho}{\rho} \cdot \rho^2 \sin \varphi dV' = \iiint_{V'} \rho \ln \rho \sin \varphi dV' = \\ &= \int_2^4 \rho \ln \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2} \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right]_2^4 \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \\ &= \pi \left[\rho^2 \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) \right]_2^4 = \underline{\underline{\pi (28 \ln 2 - 6)}} \end{aligned}$$

(infatti $\int \rho \ln \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \int \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{2} + c = \frac{\rho^2}{2} \left(\ln \rho - \frac{1}{2} \right) + c$)

$$\begin{aligned} \bullet \iiint_V x \frac{\ln \rho}{\rho} dV &= \iiint_{V'} (\rho \sin \varphi \cos \theta) (\rho \ln \rho \sin \varphi) dV' = \int_2^4 \rho^2 \ln \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ &= \dots \left[\sin \theta \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

da cui $\underline{\underline{x_B = 0}}$

$$\begin{aligned} \bullet \iiint_V y \frac{\ln \rho}{\rho} dV &= \iiint_{V'} (\rho \sin \varphi \sin \theta) (\rho \ln \rho \sin \varphi) dV' = \int_2^4 \rho^2 \ln \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \dots \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

da cui $\underline{\underline{y_B = 0}}$

$$\begin{aligned} \bullet \iiint_V z \frac{\ln \rho}{\rho} dV &= \iiint_{V'} (\rho \cos \varphi) (\rho \ln \rho \sin \varphi) dV' = \int_2^4 \rho^2 \ln \rho d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \left(\ln \rho - \frac{1}{3} \right) \right]_2^4 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \pi \left(40 \ln 2 - \frac{56}{3} \right) \end{aligned}$$

da cui $\underline{\underline{z_B = \frac{40 \ln 2 - 56/3}{28 \ln 2 - 6}}}$

② • la prima serie è a termini positivi, ove per $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} e^{\frac{2}{n}} - 1 = (e^{\frac{1}{n}} - 1)(e^{\frac{1}{n}} + 1) \text{ è infinitesimo di ordine 1} \\ \sin \sqrt{\frac{1}{n}} \text{ è infinitesimo di ordine } 1/2 \\ \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}} \text{ è infinitesimo di ordine 1} \end{cases}$$

infatti

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^n - 1)(e^n + 1)}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{n} \stackrel{(H)}{=} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \cos n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - \cos n}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos n}{n^2}} \stackrel{(H)}{=} \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Però a_n è infinitesimo di ordine $1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, dunque la serie diverge per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

• la seconda serie si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - 2^n}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

ove entrambe le serie sono convergenti, poiché geometriche di ragione positiva e minore di 1. la prima converge a $\frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

e la seconda a $\frac{1}{1 - \frac{2}{e}} = \frac{e}{e-2}$

In definitiva la serie di partenza converge dunque a

$$\frac{e}{e-1} - \frac{e}{e-2} = \frac{e[(e-2) - (e-1)]}{(e-1)(e-2)} = \frac{-e}{(e-1)(e-2)}$$